Reduction der Bedingungen des Euler'schen Criteriums der Integrabilität auf eine einzige Gleichung.

Von dem w. M. Dr. **A. Winckler.**

Bezeichnet f eine Function der Grössen

$$x,\ y \text{ und } y' = \frac{dy}{dx},\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

so ist $f.dx$ unmittelbar integrabel oder also das vollständige Differential einer andern Function von $x, y, y', \ldots y^{(n-1)}$, wenn die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d\frac{\partial f}{\partial y'}}{dx} + \frac{d^2\frac{\partial f}{\partial y''}}{dx^2} - \ldots + (-1)^n . \frac{d^n\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}}{dx^n} = 0$$

oder in anderer Schreibweise, wenn die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - D_x \frac{\partial f}{\partial y'} + D_x^{(2)} \frac{\partial f}{\partial y''} - \ldots + (-1)^n D_x^{(n)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = 0 \quad \ldots (1)$$

identisch stattfindet. Diesem von Euler (1764) und Condorcet (1765) gefundenen Satz fügte Lagrange die selbstverständlich richtige und auch aus der Gleichung (1) sich ergebende Einschränkung hinzu, dass f um integrabel zu sein, $y^{(n)}$ nur linear enthalten dürfe, also von der Form

$$f = Py^{(n)} + Q \qquad \ldots (2)$$

sein müsse, unter P und Q Functionen von $x, y, y', \ldots y^{(n-1)}$ verstanden. Ferner hat Lagrange [1] aus der Betrachtung einzelner

[1] Journal de l' école polytechn. Cahier XII. Supplément, pag. 21 (Calcul des fonctions).

Fälle geschlossen, dass die Gleichung (1), damit ihr identisch genügt werden könne, nur in n Bedingungsgleichungen zerfalle, welche gleichzeitig stattfinden müssen.

Später zeigte Joachimsthal,[1] dass sich diese n Bedingungen auf deren $\frac{1}{2}(n+1)$, wenn n ungerade, und auf $\frac{1}{2}n+1$, wenn n gerade ist, reduciren lassen.

Soweit mir die Literatur dieses Gegenstandes bekannt ist, hat die wichtige Frage nach der kleinsten Zahl der Bedingungsgleichungen, welche zur Identität der Gleichung (1) erforderlich sind, welchen also namentlich P und Q genügen müssen, zu keinen weiteren Ergebnissen geführt, so dass Herr Bertrand[2] mit den Worten:

„Quoique l'intégrabilité de la fonction $f(x, y, y', \ldots y^{(n)})$ soit exprimée par la seule équation (1), le nombre des conditions nécessaires est en réalité beaucoup plus grand et l'équation (1) peut se décomposer en plusieurs autres, qui sont toutes necéssaires" den heutigen Stand jener Frage, wenn ich nicht irre, vollkommen richtig bezeichnet.

Gelegentlich einer Arbeit über die Integration der Differentialgleichungen bin ich nun aber zu dem hiervon durchaus verschiedenen Resultat gelangt, dass sich die sämmtlichen in Rede stehenden Bedingungsgleichungen auf eine einzige reduciren, und dass diese einzige Gleichung, welche zu erfüllen ist, damit die Gleichung (1) identisch stattfinde, direct und in voller Allgemeinheit den Werth liefert, welcher Q beizulegen ist, wenn man für P irgend eine Function von x, y, $y', \ldots y^{(n-1)}$ gewählt hat. Dieses Resultat enthält die einfache und wie ich glaube, die vollständige Lösung der seit so langer Zeit besprochenen Frage.

1.

Soll die Herleitung unmittelbar von der Gleichung (1) ausgehen, so muss man vor Allem die Summen der zwei, drei und vier letzten Glieder jener Gleichung, also die Ausdrücke:

Crelle, Journal, Bd. 33.

Traité de calcul différential et de calcul intégral. T. II, p. 562.

$$(-1)^{n-1} D_x^{(n-1)} \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - D_x \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right] \qquad \ldots (3)$$

$$(-1)^{n-2} D_x^{(n-2)} \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - D_x \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right]\right] \qquad \ldots (4)$$

$$(-1)^{n-3} D_x^{(n-3)} \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-3)}} - D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - D_x \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right]\right]\right] \qquad \ldots (5)$$

nacheinander in Betracht ziehen und darin $f = Py^{(n)} + Q$ setzen, wobei

$$P = \varphi(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}), \quad Q = \psi(x, y, y', \ldots y^{(n-1)})$$

ist.

Beginnt man mit dem Ausdruck (3), so ist zunächst die darin vorkommende Klammergrösse zu berechnen. Man bemerke zu dem Ende, dass:

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} = y^{(n)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial Q}{\partial y^{(n-1)}},$$

$$D_x \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = \frac{dP}{dx} = \frac{\partial P}{\partial x} + y' \frac{\partial P}{\partial y} + \ldots + y^{(n-1)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} + y^{(n)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-1)}}$$

daher

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - D_x \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = \frac{\partial Q}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{\partial P}{\partial x} - y' \frac{\partial P}{\partial y} - \ldots - y^{(n-1)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}}$$

ist und dass hieraus

$$D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - D_x \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right] =$$

$$y^{(n)} \left[\frac{\partial^2 Q}{\partial y^{(n-1)} \partial y^{(n-1)}} - \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y^{(n-1)}} - y' \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial y^{(n-1)}} - \right.$$

$$\left. - y^{(n-1)} \frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-2)} \partial y^{(n-1)}} - \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}}\right]$$

$$+ D_x \left[\frac{\partial Q}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{\partial P}{\partial x} - y' \frac{\partial P}{\partial y} - \quad - y^{(n-1)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}}\right]_{y^{(n-1)}} \qquad \ldots (6)$$

folgt, wobei das der Klammer angehängte Zeichen $y^{(n-1)}$ bedeutet, es sei bei der Differentiation der Grösse in der Klammer $y^{(n-1)}$ als constant zu betrachten.

Dies vorausgesetzt, betrachte man nun die Summe (4) der drei letzten Glieder von (1), beziehungsweise die darin vorkommende Klammergrösse, in welcher nach (2)

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} = y^{(n)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} + \frac{\partial Q}{\partial y^{(n-2)}} \qquad \ldots (7)$$

zu setzen ist. Es ergibt sich dann, wenn man auf die Gleichungen (6) und (7) Rücksicht nimmt, die folgende Formel:

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - D_x \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right] =$$

$$y^{(n)} \left[- \frac{\partial^2 Q}{\partial y^{(n-1)} \partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y^{(n-1)}} + y' \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial y^{(n-1)}} + \cdots \right.$$
$$\left. + y^{(n-1)} \frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-2)} \partial y^{(n-1)}} + 2 \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} \right] \qquad \ldots (8)$$

$$+ \frac{\partial Q}{\partial y^{(n-2)}} + D_x \left[- \frac{\partial Q}{\partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial P}{\partial x} + y' \frac{\partial P}{\partial y} + \cdots + y^{(n-1)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} \right]_{y^{(n-1)}}$$

Da das erste Glied rechter Hand, in (4) eingesetzt, noch der $(n-2)$maligen Differentiation zu unterziehen ist, so entsteht aus ihm ein anderes, welches $y^{(2n-2)}$ enthält; ein solches Glied kann aber aus keinem der übrigen Glieder in (1) mehr hervorgehen, denn selbst das viertletzte

$$D_x^{(n-3)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n-3)}} = D_x^{(n-3)} \left[y^{(n)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}} + \frac{\partial Q}{\partial y^{(n-3)}} \right]$$

enthält als höchsten Differentialquotienten von y nur noch $y^{(2n-3)}$. Hieraus folgt, dass, damit die Gleichung (1) identisch werden könne, das Glied rechter Hand in (8), welches $y^{(n)}$ als Factor enthält, nothwendig verschwinden, dass also die Gleichung

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial y^{(n-1)}\,\partial y^{(n-1)}} =$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y^{(n-1)}} + y' \frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial y^{(n-1)}} + \ldots + y^{(n-1)} \frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-2)}\,\partial y^{(n-1)}} + 2\frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} \ldots (9)$$

bestehen muss. Diese Gleichung ist nun näher zu betrachten.

Aus ihr ergibt sich durch Integration nach $y^{(n-1)}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial y^{(n-1)}} =$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + y' \frac{\partial P}{\partial y} + \ldots + y^{(n-2)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}} + \int y^{(n-1)} \frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-2)}\,\partial y^{(n-1)}}\,\partial y^{(n-1)} + 2\int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}}\,\partial y^{(n-1)} + P_1 \quad \ldots (10)$$

wobei

$$P_1 = \varphi_1(x, y, y', \ldots y^{(n-2)})$$

eine willkürliche Function der in der Parenthese enthaltenen Grössen bezeichnet.

Nun ist

$$\int y^{(n-1)} \frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-2)}\,\partial y^{(n-1)}}\,\partial y^{(n-1)} = y^{(n-1)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} - \int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}}\,\partial y^{(n-1)}$$

folglich kann (10) in der Form

$$\frac{\partial Q}{\partial y^{(n-1)}} =$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + y' \frac{\partial P}{\partial y} + \ldots + y^{(n-1)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} + \int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}}\,\partial y^{(n-1)} + P_1 \quad \ldots (11)$$

oder wie folgt:

$$\frac{\partial Q}{\partial y^{(n-1)}} =$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + y' \frac{\partial P}{\partial y} + \ldots + y^{(n-2)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}} + \frac{\partial \left[y^{(n-1)} \int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}}\,\partial y^{(n-1)} \right]}{\partial y^{(n-1)}} + P_1$$

geschrieben werden.

Wird auch diese Gleichung nach $y^{(n-1)}$ integrirt, so ergibt sich:

$$Q=$$

$$y^{(n-1)}\int\frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}}\,\partial y^{(n-1)}+\int\left[\frac{\partial P}{\partial x}+y'\frac{\partial P}{\partial y}+\ldots+y^{(n-2)}\frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}}\right]\partial y^{(n-1)}$$
$$+P_1 y^{(n-1)}+Q_1 \qquad \ldots(\mathrm{I})$$

unter

$$Q_1=\psi_1(x,\,y,\,y',\ldots y^{(n-2)})$$

eine zunächst nicht näher bestimmte Function der in der Parenthese enthaltenen Grössen verstanden.

Die Gleichung (8), zu welcher ich nun zurückkehre, geht in Folge der Gleichung (9) und dann der Gleichung (11) über in:

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}}-D_x\left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}-D_x\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right]$$

$$=\frac{\partial Q}{\partial y^{(n-2)}}+D_x\left[-\frac{\partial Q}{\partial y^{(n-1)}}+\frac{\partial P}{\partial x}+y'\frac{\partial P}{\partial y}+\ldots+y^{(n-1)}\frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}}\right]_{y^{(n-1)}}$$

$$=\frac{\partial Q}{\partial y^{(n-2)}}-D_x\left[\int\frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}}\,\partial y^{(n-1)}\right]_{y^{(n-1)}}-D_x\left[P_1\right]_{y^{(n-1)}} \qquad \ldots(12)$$

Durch die Ausführung der in den beiden letzten Gliedern angedeuteten vollständigen Differentiationen, und zunächst aus (I) ergibt sich:

$$\frac{\partial Q}{\partial y^{(n-2)}}=$$

$$y^{(n-1)}\int\frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-2)}\,\partial y^{(n-2)}}\,\partial y^{(n-1)}$$

$$+\int\left[\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y^{(n-2)}}+y'\frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial y^{(n-2)}}+\ldots+y^{(n-2)}\frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-3)}\,\partial y^{(n-2)}}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}}\right]\partial y^{(n-1)}$$

$$+y^{(n-1)}\frac{\partial P_1}{\partial y^{(n-2)}}+\frac{\partial Q_1}{\partial y^{(n-2)}} \qquad \ldots(13)$$

sodann:

$$D_x\left[\int\frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}}\,\partial y^{(n-1)}\right]_{y^{(n-1)}}$$

$$=\int\left[\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y^{(n-2)}}+y'\frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial y^{(n-2)}}+\ldots+y^{(n-2)}\frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-3)}\,\partial y^{(n-2)}}\right]\partial y^{(n-1)}$$

$$+y^{(n-1)}\int\frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-2)}\,\partial y^{(n-2)}}\,\partial y^{(n-1)} \qquad \ldots(14)$$

wobei hinsichtlich des letztern Integrals in dieser Gleichung, welches aus der Differentiation des

$$\int\frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}}\,\partial y^{(n-1)}$$

nach $y^{(n-2)}$ und dann des $y^{(n-2)}$ nach x hervorgeht, beachtet werden muss, dass der Factor $y^{(n-1)}$ vor das Integralzeichen zu setzen war, weil die Integration, bei der $y^{(n-2)}$ constant bleibt, vorangeht, und die Differentiation, durch welche jener Factor erst entsteht, nachfolgt.

Aus (13) und (14) folgt nun:

$$\frac{\partial Q}{\partial y^{(n-2)}}-D_x\left[\int\frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}}\,\partial y^{(n-1)}\right]_{y^{(n-1)}}$$

$$=\int\frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}}\,\partial y^{(n-1)}+\frac{\partial P_1}{\partial y^{(n-2)}}\,y^{(n-1)}+\frac{\partial Q_1}{\partial y^{(n-2)}} \qquad \ldots(15)$$

Bemerkt man noch, dass $D_x[P_1]_{y^{(n-1)}}=\frac{dP_1}{dx}$, weil P_1 ohnehin von $y^{(n-1)}$ frei ist, so verwandelt sich die Gleichung (12), resp. (8) in die folgende:

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}}-D_x\left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}-D_x\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right] \qquad \ldots(16)$$

$$=\int\frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}}\,\partial y^{(n-1)}+\frac{\partial P_1}{\partial y^{(n-2)}}\cdot y^{(n-1)}+\frac{\partial Q_1}{\partial y^{(n-2)}}-\frac{dP_1}{dx}$$

Setzt man jetzt der Abkürzung wegen:

$$f_1=P_1\,y^{(n-1)}+Q_1$$

so ist:

$$P_1 = \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}}, \quad \frac{\partial P_1}{\partial y^{(n-2)}} \cdot y^{(n-1)} + \frac{\partial Q_1}{\partial y^{(n-2)}} = \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-2)}}$$

folglich:

$$\frac{\partial P_1}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)} + \frac{\partial Q_1}{\partial y^{(n-2)}} - \frac{dP_1}{dx} = \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-2)}} - D_x \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}}$$

und kann endlich die Gleichung (16) durch die folgende:

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - D_x \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right]$$

$$= \int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}} \partial y^{(n-1)} + \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-2)}} - D_x \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}} \qquad \ldots(17)$$

ersetzt werden.

Geht man nun weiter und betrachtet die Summe (5) der vier letzten Glieder von (1), resp. den ganzen darin vorkommenden Klammerausdruck, so ergibt sich hierfür mit Rücksicht auf (17) die Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n-3)}} - D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - D_x \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right]\right]$$

$$= \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}} y^{(n)} + \frac{\partial Q}{\partial y^{(n-3)}} - D_x \int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}} \partial y^{(n-1)} \qquad \ldots(18)$$

$$- D_x \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-2)}} + D_x^{(2)} \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}}$$

Da nun aus (I):

$$\frac{\partial Q}{\partial y^{(n-3)}} =$$

$$y^{(n-1)} \int \frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-3)}\, \partial y^{(n-2)}} . \partial y^{(n-1)}$$

$$+ \int \left[\frac{\partial^2 P}{\partial x\, \partial y^{(n-3)}} + y' \frac{\partial^2 P}{\partial y\, \partial y^{(n-3)}} + \ldots + y^{(n-3)} . \frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-4)}\, \partial y^{(n-3)}}\right.$$

$$\left. + y^{(n-2)} . \frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-3)}\, \partial y^{(n-3)}}\right] \partial y^{(n-1)}$$

$$+ \int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-4)}} \partial y^{(n-1)} + y^{(n-1)} \frac{\partial P_1}{\partial y^{(n-3)}} + \frac{\partial Q_1}{\partial y^{(n-3)}}$$

folgt, und da

$$D_x \int \frac{P}{\partial y^{(n-3)}} \partial y^{(n-1)} =$$

$$\int \left[\frac{\partial^2 P}{\partial x \, \partial y^{(n-3)}} + y' \frac{\partial^2 P}{\partial y \, \partial y^{(n-3)}} + \ldots + y^{(n-3)} \frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-4)} \, \partial y^{(n-3)}} \right.$$

$$\left. + y^{(n-2)} \frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-3)} \, \partial y^{(n-3)}} \right] \partial y^{(n-1)}$$

$$+ y^{(n-1)} \int \frac{\partial^2 P}{\partial y^{(n-3)} \, \partial y^{(n-2)}} \partial y^{(n-1)} + y^{(n)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}}$$

ist, so erhält man:

$$\frac{\partial Q}{\partial y^{(n-3)}} - D_x \int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}} \partial y^{(n-1)} = \int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-4)}} \partial y^{(n-1)} - y^{(n)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}}$$

$$+ y^{(n-1)} \frac{\partial P_1}{\partial y^{(n-3)}} + \frac{\partial Q_1}{\partial y^{(n-3)}}$$

Die Gleichung (18) kann daher wie folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n-3)}} - D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - D_x \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right] \right]$$

$$= \int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-4)}} \partial y^{(n-1)} + \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-3)}} - D_x \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-2)}} + D_x^{(2)} \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}} \ldots (19)$$

geschrieben werden.

Von hier an hat nun die weitere Entwicklung einen regelmässigen Fortgang, wie dies übrigens schon aus der Vergleichung der Formeln in (17) und (19) sich ergibt.

Zum Überfluss will ich noch bemerken, dass für die Summe der fünf letzten Glieder von (1) die Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(n-4)}} - D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-3)}} - D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - D_x \left[\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - D_x \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \right] \right] \right]$$

$$= \int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-5)}} \partial y^{(n-1)} + \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}} - D_x \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-3)}} + D_x^{(2)} \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-2)}}$$

$$- D_x^{(3)} \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}}.$$

erhalten wird.

Setzt man das Verfahren fort, bis sich linker Hand die Summe der n letzten Glieder von (1) ergibt, so gelangt man hiernach zu der Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} - D_x \frac{\partial f}{\partial y''} + D_x^{(2)} \frac{\partial f}{\partial y'''} - \ldots + (-1)^{n-1} D_x^{(n-1)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}$$

$$= \int \frac{\partial P}{\partial y} \partial y^{(n-1)} + \frac{\partial f_1}{\partial y'} - D_x \frac{\partial f_1}{\partial y''} + \ldots + (-1)^{n-2} D_x^{(n-2)} \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}}$$

und daher, wenn man zur Summe aller Glieder von (1) übergeht:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - D_x \frac{\partial f}{\partial y'} + D_x^{(2)} \frac{\partial f}{\partial y''} - \ldots + (-1)^n D_x^{(n)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}$$

$$= \frac{\partial P}{\partial y} y^{(n)} + \frac{\partial Q}{\partial y} - D_x \int \frac{\partial P}{\partial y} \partial y^{(n-1)}$$

$$- D_x \frac{\partial f_1}{\partial y'} + D_x^{(2)} \frac{\partial f_1}{\partial y''} - \quad + (-1)^{n-1} D_x^{(n-1)} \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}} \quad \ldots(20)$$

Nun folgt wieder aus (I):

$$\frac{\partial Q}{\partial y} =$$

$$y^{(n-1)} \int \frac{\partial^2 P}{\partial y\, \partial y^{(n-2)}} \partial y^{(n-1)}$$

$$+ \int \left[\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + y' \frac{\partial^2 P}{\partial y\, \partial y} + y'' \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial y'} + \ldots + y^{(n-2)} \frac{\partial^2 P}{\partial y\, \partial y^{(n-3)}} \right] \partial y^{(n-1)}$$

$$+ y^{(n-1)} \frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{\partial Q_1}{\partial y}$$

Ferner ist:

$$D_x \int \frac{\partial P}{\partial y} \partial y^{(n-1)} =$$

$$\int \left[\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + y' \frac{\partial^2 P}{\partial y\, \partial y} + y'' \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial y'} + \ldots + y^{(n-2)} \frac{\partial^2 P}{\partial y\, \partial y^{(n-3)}} \right] \partial y^{(n-1)}$$

$$+ y^{(n-1)} \int \frac{\partial^2 P}{\partial y\, \partial y^{(n-2)}} \partial y^{(n-1)} + y^{(n)} \frac{\partial P}{\partial y}$$

Man hat daher:

$$\frac{\partial Q}{\partial y} - D_x \int \frac{\partial P}{\partial y} \partial y^{(n-1)} = -y^{(n)} \frac{\partial P}{\partial y} + y^{(n-1)} \frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{\partial Q_1}{\partial y}$$

und kann die Gleichung (20) wie folgt schreiben:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - D_x \frac{\partial f}{\partial y'} + D_x^{(2)} \frac{\partial f}{\partial y''} - \ldots + (-1)^n D_x^{(n)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \qquad \ldots (21)$$

$$= \frac{\partial f_1}{\partial y} - D_x \frac{\partial f_1}{\partial y'} + D_x^{(2)} \frac{\partial f_1}{\partial y''} - \ldots + (-1)^{n-1} D_x^{(n-1)} \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}}$$

Damit die Gleichung (1) stattfinde, genügt es hiernach, dass die zweite Seite der Gleichung (21) identisch verschwinde, oder, was dasselbe ist, dass auch die Function

$$f_1 = P_1 y^{(n-1)} + Q_1$$

integrabel sei. Bestimmt man für diese den Werth von Q_1 auf dieselbe Art wie früher Q für f, also nach der Formel (I), so ergibt sich:

$$Q_1 =$$

$$y^{(n-2)} \int \frac{\partial P_1}{\partial y^{(n-3)}} \partial y^{(n-2)} + \int \left[\frac{\partial P_1}{\partial x} + y' \frac{\partial P_1}{\partial y} + \ldots + y^{(n-3)} \frac{\partial P_1}{\partial y^{(n-4)}} \right] \partial y^{(n-2)}$$

$$+ P_2 y^{(n-2)} + Q_2$$

wobei

$$P_2 = \varphi_2(x, y, y', \ldots y^{(n-3)}),$$
$$Q_2 = \psi_2(x, y, y', \ldots y^{(n-3)})$$

ist.

Wenn man in gleicher Weise auch Q_2 nach der Formel

$$Q_2 =$$

$$y^{(n-3)} \int \frac{\partial P_2}{\partial y^{(n-4)}} \partial y^{(n-3)} + \int \left[\frac{\partial P_2}{\partial x} + y' \frac{\partial P_2}{\partial y} + \ldots + y^{(n-4)} \frac{\partial P_2}{\partial y^{(n-5)}} \right] \partial y^{(n-3)}$$

$$+ P_3 y^{(n-3)} + Q_3$$

wobei

$$P_3 = \varphi_3(x, y, y', \dots y^{(n-4)}),$$

$$Q_3 = \psi_3(x, y, y', \dots y^{(n-4)})$$

ist, bestimmt, sodann:

$$f_2 = P_2 y^{(n-2)} + Q_2$$

setzt, so wird zwischen f_1 und f_2 die folgende Gleichung stattfinden, welche der Gleichung (21) zwischen f und f_1 analog ist:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} - D_x \frac{\partial f_1}{\partial y'} + D_x^{(2)} \frac{\partial f_1}{\partial y''} - \dots + (-1)^{n-1} D_x^{(n-1)} \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}} \quad \dots(22)$$

$$= \frac{\partial f_2}{\partial y} - D_x \frac{\partial f_2}{\partial y'} + D_x^{(2)} \frac{\partial f_2}{\partial y''} - \dots + (-1)^{n-2} D_x^{(n-2)} \frac{\partial f_2}{\partial y^{(n-2)}}$$

Die Gleichung (1) wird also auch dann erfüllt sein, wenn die zweite Seite der Gleichung (22) identisch verschwindet, oder, was dasselbe besagt, wenn auch die Function f_2 integrabel ist.

Ebenso wird, wenn man Q_3 gemäss der Formel

$$Q_3 =$$

$$y^{(n-4)} \int \frac{\partial P_3}{\partial y^{(n-5)}} \partial y^{(n-4)} + \int \left[\frac{\partial P_3}{\partial x} + y' \frac{\partial P_3}{\partial y} + \dots + y^{(n-5)} \frac{\partial P_3}{\partial y^{(n-6)}} \right] \partial y^{(n-4)}$$

$$+ P_4 y^{(n-4)} + Q_4$$

wobei

$$P_4 = \varphi_4(x, y, y', \dots y^{(n-5)}), \quad Q_4 = \psi_4(x, y, y', \dots y^{(n-5)})$$

ist, bestimmt und dann

$$f_3 = P_3 y^{(n-3)} + Q_3$$

setzt, die zu (21) analoge Gleichung:

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} - D_x \frac{\partial f_2}{\partial y'} + D_x^{(2)} \frac{\partial f_2}{\partial y''} - \dots + (-1)^{n-2} D_x^{(n-2)} \frac{\partial f_2}{\partial y^{(n-2)}}$$

$$= \frac{\partial f_3}{\partial y} - D_x \frac{\partial f_3}{\partial y'} + D_x^{(2)} \frac{\partial f_3}{\partial y''} - \dots + (-1)^{n-3} D_x^{(n-3)} \frac{\partial f_3}{\partial y^{(n-3)}} \quad \dots(23)$$

stattfinden. Hieraus folgt, dass die Gleichung (1) auch dann besteht, wenn die zweite Seite der Gleichung (23) identisch verschwindet, oder, was hiermit gleichbedeutend, wenn auch die Function f_3 integrabel ist.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man zu der Function

$$f_{n-2} = P_{n-2}\, y'' + Q_{n-2}$$

worin

$$P_{n-2} = \varphi_{n-2}(x, y, y'), \quad Q_{n-2} = \psi_{n-2}(x, y, y')$$

Wird Q_{n-2} wieder nach der Gleichung (I) oder direct in der Weise, auf welche (I) erhalten wurde, bestimmt, so folgt:

$$Q_{n-2} = y' \int \frac{\partial P_{n-2}}{\partial y}\, \partial y' + \int \frac{\partial P_{n-2}}{\partial x}\, \partial y' + P_{n-1}\, y' + Q_{n-1}$$

wobei

$$P_{n-1} = \varphi_{n-1}(x, y), \quad Q_{n-1} = \psi_{n-1}(x, y)$$

Wenn man ferner Q_{n-1} durch die Gleichung

$$Q_{n-1} = \int \frac{\partial P_{n-1}}{\partial x}\, \partial y + P_n \qquad \ldots(24)$$

definirt, wobei

$$P_n = \varphi_n(x)$$

ist, und wenn endlich

$$f_{n-1} = P_{n-1}\, y' + Q_{n-1}$$

gesetzt wird, so erhält man die zu (21) analoge Gleichung:

$$\frac{\partial f_{n-2}}{\partial y} - D_x \frac{\partial f_{n-2}}{\partial y'} + D_x^{(2} \frac{\partial f_{n-2}}{\partial y''}$$
$$= \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} - D_x \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y'} \qquad \ldots(25)$$

Die Gleichung (1) wird also auch dann identisch stattfinden, wenn die zweite Seite der Gleichung (25) identisch verschwindet.

Nun ist, mit Rücksicht auf (24)

$$\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y} = \frac{\partial P_{n-1}}{\partial y} y' + \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial y} = \frac{\partial P_{n-1}}{\partial y} y' + \frac{\partial P_{n-1}}{\partial x}$$

$$D_x \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y'} = D_x P_{n-1} = \frac{\partial P_{n-1}}{\partial y} y' + \frac{\partial P_{n-1}}{\partial x}$$

Es verschwindet also in der That die zweite Seite der Gleichung (25) identisch, folglich auch die erste Seite der Gleichung (1), wie es sein soll.

Dies ist also schon der Fall, wenn die, blos durch ihre Argumente definirten Functionen $P, P_1, \ldots P_n$ beliebig gewählt, und die Functionen $Q, Q_1, \ldots Q_{n-1}$ mittelst der oben angegebenen Gleichungen bestimmt werden.

In dem ganz speciellen Falle, wenn die unbestimmt gebliebenen Functionen $P_1, P_2, \ldots P_n$ gleich Null gesetzt werden, verschwinden auch $Q_1, Q_2, \ldots Q_{n-1}$ und geht die Formel (I) über in:

$$Q =$$

$$y^{(n-1)} \int \frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}} \partial y^{(n-1)} + \int \left[\frac{\partial P}{\partial x} + y' \frac{\partial P}{\partial y} + \ldots + y^{(n-2)} \frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}} \right] \partial y^{(n-1)}$$

woraus das bemerkenswerthe Resultat folgt, dass selbst dieser einfachste Werth von Q, wie man auch P, seiner Definition gemäss, wählen mag, das Euler'sche Criterium (1) ohne jede sonstige Bedingung in eine identische Gleichung verwandelt, dass also weder n, noch $\frac{1}{2}(n+1)$ resp. $\frac{1}{2} n+1$, noch sonst welche Bedingungen hierzu erforderlich sind.

Belässt man aber die P in ihrer, nur durch die Argumente beschränkten Unbestimmtheit und also die Q in der durch die früheren Gleichungen gegebenen Allgemeinheit, so können die Ergebnisse dieser Betrachtung wie folgt zusammengefasst werden.

2.

Bezeichnen

$$\begin{aligned} P &= \varphi(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}) \\ P_1 &= \varphi_1(x, y, y', \ldots y^{(n-2)}) \\ \\ P_{n-2} &= \varphi_{n-2}(x, y, y') \\ P_{n-1} &= \varphi_{n-1}(x, y) \\ P_n &= \varphi_n \;(x) \end{aligned}$$

beliebige Functionen der in den Parenthesen enthaltenen Grössen, so ist die Function:

$$Py^{(n)} + Q$$

unmittelbar integrabel, wenn Q aus der Gleichung:

$$Q =$$

$$y^{(n-1)}\int\frac{\partial P}{\partial y^{(n-2)}}\partial y^{(n-1)} + \int\left(\frac{\partial P}{\partial x} + y'\frac{\partial P}{\partial y} + \ldots + y^{(n-2)}\frac{\partial P}{\partial y^{(n-3)}}\right)\partial y^{(n-1)} + P_1 y^{(n-1)}$$

$$+ y^{(n-2)}\int\frac{\partial P_1}{\partial y^{(n-3)}}\partial y^{(n-2)} + \int\left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + y'\frac{\partial P_1}{\partial y} + \ldots + y^{(n-3)}\frac{\partial P_1}{\partial y^{(n-4)}}\right)\partial y^{(n-2)} + P_2 y^{(n-2}$$

$$+$$

$$+ y''\int\frac{\partial P_{n-3}}{\partial y'}\partial y'' + \int\left(\frac{\partial P_{n-3}}{\partial x} + y'\frac{\partial P_{n-3}}{\partial y}\right)\partial y'' + P_{n-2}y''$$

$$+ y'\int\frac{\partial P_{n-2}}{\partial y}\partial y' + \int\frac{\partial P_{n-2}}{\partial x}\partial y' + P_{n-1}y'$$

$$+ \int\frac{\partial P_{n-1}}{\partial x}\partial y + P_n$$

bestimmt wird.

Diese Gleichung drückt vermöge der in ihr enthaltenen willkürlichen Functionen die allgemeinste und zugleich die einzige Bedingung aus, welche erforderlich ist, damit dem Euler'schen Criterium der Integrabilität als einer identischen Gleichung entsprochen werde.